ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1982
OPTION M'
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Le théorème de Hardy – Littlewood

Pour toute série S à termes complexes a_n ($n \in \mathbb{N}$), on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle de rang n et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ la moyenne arithmétique des $n+1$ premières sommes partielles.

Dans l'ensemble des séries S, on envisage les sous-ensembles :

$\mathscr{S}_1$ constitué des séries S convergentes ;
$\mathscr{S}_2$ constitué des séries S telles que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$;
$\mathscr{S}_3$ constitué des séries S telles que la série entière de coefficients a_n ait un rayon de convergence au moins égal à 1 et que de plus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définisse sur $]-1,1[$ une fonction f ayant dans $\mathbb{C}$ une limite, notée l, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I

1. Étudier, du point de vue de l'appartenance à $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$, la série S_1 de terme général $a_n = (-1)^n$.
2. Étudier, du point de vue de l'appartenance à $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$, la série S_1 de terme général $a_n = (-1)^{n+1} n$.
3. Établir l'inclusion $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.
4. Soit $S \in \mathscr{S}_2$.
   (a) Établir la convergence, pour tout $x \in]-1,1[$, de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n x^n$ puis de la série $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ à l'aide de la somme $g(x)$ de la première des ces séries entières.
   (b) Montrer que $S \in \mathscr{S}_3$ et que, lorsque x tend vers 1, f a pour limite la limite σ de la suite $(\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Résumer, en termes d'inclusions entre $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$ les résultats obtenus jusqu'ici. Comment ces résultats se modifient-ils si l'on se restreint à des séries S à termes a_n positifs ou nuls ?

Partie II

Dans cette partie, on considère une série S fixée, appartenant à $\mathscr{S}_3$, de terme général réel a_n, telle qu'il existe un réel A vérifiant l'inégalité $na_n \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, tous des polynômes envisagés seront à coefficients réels. Enfin, dans le calcul de x^n pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on conviendra que $0^0 = 1$.

1. (a) Soit $p(X) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x^k$ un polynôme de valuation strictement positive. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1\,;1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de sa somme à l'aide de l et d'une valeur prise par p en un point qu'on précisera.

   (b) Soit $q = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k x^k$ un polynôme. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1\,;1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n)$ à l'aide d'une intégrale portant sur q.

2. On admet que pour toute fonction φ numérique continue sur $[0,1]$ il existe une suite de polynômes convergeant vers φ uniformément sur $[0,1]$. En déduire que pour tout fonction ψ numérique continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et admettant une limite à gauche au point $\frac{1}{2}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes q_1 et q_2 tels que $q_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant q_2(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ avec $\int_0^1 (q_2(x) - q_1(x))dx \leqslant \varepsilon$.

3. Soit χ la fonction égale à 1 sur $[\frac{1}{2},1]$ et nulle sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact inclus dans $[\,0\,;1\,[$.

   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes p_1 et p_2, de valuations strictement positives, tels que $p_1(1) = p_2(1)$ et que $p_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant p_2(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ avec $\int_0^1 \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} dx \leqslant \varepsilon$.

   (c) Établir que pour x appartenant à $[0,1[$ et assez proche de 1, les différences $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_2(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n)$ sont toutes deux majorées par $(A+1)\varepsilon$, et en déduire la convergence de la série S.

   (d) La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. (a) Soit S_3 une série appartenant à $\in \mathscr{S}_3$, de terme général b_n et telle qu'il existe un réel B vérifiant $nb_n \geqslant B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_3 converge-t-elle ?

   (b) Existe-t-il une telle série S_3 vérifiant en outre la condition $\sup_{n\in\mathbb{N}} nb_n = +\infty$?

   (c) Soit S_4 une série appartenant à S_3, de terme général complexes c_n et telle qu'il existe un réel C vérifiant l'inégalité $|nc_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_4 converge-t-elle ?

(d) Existe-t-il une série S_5 appartenant à $\in \mathscr{S}_1$, de terme général réel d_n et telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} nd_n = -\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} nd_n = +\infty$?

FIN DE L'ÉPREUVE